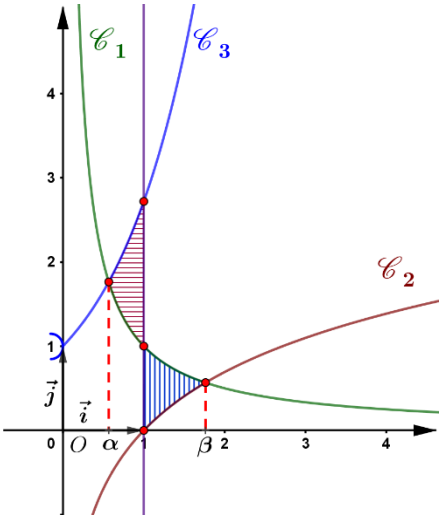
EXERCICE N°1 : | **50'** | **7 points**

Dans le graphique ci-contre, on a représenté les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



- La courbe $\mathscr{C}_1$ représente la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- La courbe $\mathscr{C}_2$ représente la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $x \mapsto \ln x$.
- La courbe $\mathscr{C}_3$ représente la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $x \mapsto e^x$.

1°) a) Déterminer graphiquement le signe de $\left(\ln x - \frac{1}{x}\right)$ sur $]0,+\infty[$.

b) Déterminer graphiquement le signe de $\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$ sur $]0,+\infty[$.

2°) a) Calculer en fonction de α, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan hachurée en rayure horizontale.

b) Vérifier que $\mathcal{A} = e + \ln\alpha - \frac{1}{\alpha}$.

3°) a) Calculer en fonction de β, l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan hachurée en rayure verticale.

b) Montrer que $\mathcal{A}' = \frac{(\beta-1)^2}{\beta}$.

4°) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln x$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement le résultat.

5°) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Etudier la position de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_3$.

c) Expliquer comment utiliser les courbes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ pour tracer la tangente horizontale de $\mathscr{C}$.

d) Tracer $\mathscr{C}$ dans le même repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.

6°) Hachurer (en rayure oblique) en justifiant le domaine $\mathcal{D}$ du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$; et ; les droites d'équations : $x = \lambda$ *et* $x = \alpha$ tel que $0 < \lambda < \alpha$ et l'aire du $\mathcal{D}$ est égale à $\mathcal{A}$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn
Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn